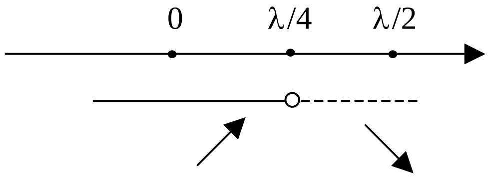
PROBLEMA 1

a) indicate con x e con $\frac{\lambda}{2} - x$ le dimensioni dell'aiuola, con le limitazioni $0 \le x \le \frac{\lambda}{2}$, la funzione che ne esprime l'area è:

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{\lambda}{2} - x \right) = \frac{\lambda}{2} x - x^2 .$$

Per la ricerca del massimo si studia il segno della derivata prima $A'(x) = \frac{\lambda}{2} - 2x$.

Si ha:



Si ha la massima area per $x = \frac{\lambda}{2}$.

Poiché la funzione rappresentativa è un polinomio di secondo grado il massimo relativo è anche massimo assoluto.
Allo stesso risultato si poteva giungere in modo diretto considerando che si tratta di un problema simmetrico e che il valore estremo si ha nel centro della simmetria. È noto infatti che fra tutti i rettangoli di dato perimetro il quadrato è quello di area massima.

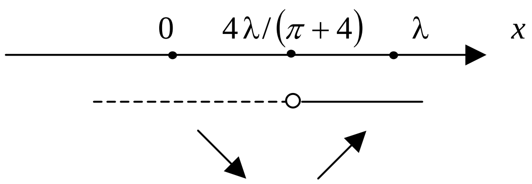
b) Indicate rispettivamente con x e con $\lambda - x$ le due parti in cui è suddiviso il filo, con le limitazioni $0 \le x \le \lambda$, le aree dell'aiuola circolare e dell'aiuola quadrata sono, rispettivamente:

$$A_C(x) = \frac{(\lambda - x)^2}{4\pi} \quad \text{e} \quad A_Q(x) = \frac{x^2}{16}$$

essendo $\frac{\lambda - x}{2\pi}$ ed $\frac{x}{4}$, rispettivamente raggio e lato del quadrato. La somma delle aree è:

$S(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(\lambda - x)^2}{4\pi}$ e risulta $S'(x) = \frac{x}{8} - \frac{\lambda - x}{2\pi}$

Dallo studio del segno di $S'(x)$ si ha:



Pertanto il minimo di $S(x)$ si ha per $x = \frac{4\lambda}{\pi + 4}$ e, poiché la funzione $S(x)$ è un polinomio di 2° grado, tale valore è anche minimo assoluto.

c) L'eventuale massimo di $S(x)$, per la natura di tale funzione, può essere solo in corrispondenza degli estremi dell'intervallo.

Si ha $S(0)=\dfrac{\lambda^2}{4\pi}$ e $S(\lambda)=\dfrac{\lambda^2}{16}$. Il massimo richiesto si ha in un estremo, cioè per $x=0$, quando cioè tutto il filo viene utilizzato per l'aiuola circolare.

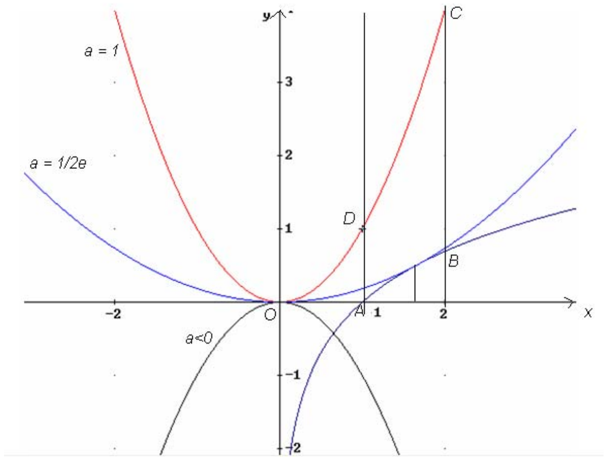
Indicate a, b, c le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo, il suo volume è $V=a\cdot b\cdot c$. Aumentando del 10% ogni dimensione il volume risulta $V_1=(1{,}1)^3 a\cdot b\cdot c=1{,}331V$. L'aumento è dunque del 33,1%.

PROBLEMA 2

1. La condizione di tangenza tra le due funzioni impone che sia:

$$\begin{cases}\log x = ax^2\\ \dfrac{1}{x}=2ax\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{2x^2}\\ \log x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\sqrt{e}\\ a=\dfrac{1}{2e}\end{cases}$$

   Essendo $x=\sqrt{e}$ l'ascissa del punto di tangenza.
   Le soluzioni dell'equazione $\log x = ax^2$ sono le ascisse dei punto di intersezione delle due funzioni
   Per $a<0$ l'equazione $\log x = ax^2$ ha sempre una ed una sola soluzione.
   Per $a=0$ la g(x) è l'asse x e quindi una sola soluzione.
   Per $0<a\le\dfrac{1}{2}$ si hanno due soluzioni.



2. $Area(ABCD)=\displaystyle\int_1^2\left(x^2-\log x\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2-\left[x\log x-x\right]_1^2=\frac{10}{3}-2\log 2$

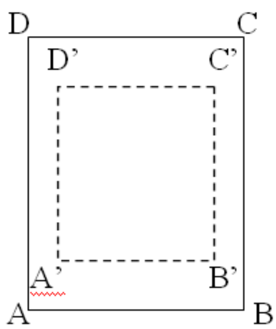
QUESTIONARIO

1. La somma S dei chicchi di grano è data dalla somma dei primi 64 termini di una progressione geometrica di primo termine1, di ragione q = 2. Risulta pertanto $S = \sum_{k=0}^{63} 2^k = 2^{64} - 1$. Trattandosi di un problema concreto procediamo con criteri di approssimazione. Intanto possiamo assumere $S \cong 2^{64}$. Sapendo che $2^{10} = 1024$ può essere approssimato con 10^3, si ha: $2^{64} = 2^{10} \cdot 2^{54} \cong 10^3 \cdot 2^{54}$. Il peso totale in grammi è $\frac{10^{3} \cdot 2^{54}}{10^3} 38 = 38 \cdot 2^{54}$. Per avere il peso in tonnellate si deve dividere questo numero per $10^6 \cong 2^{20}$. Si ha pertanto che il grano richiesto pesa circa $\frac{38 \cdot 2^{54}}{2^{20}} = 2^{34}$ tonnellate. Anche ricorrendo al calcolo logaritmico si possono calcolare le approssimazioni richieste.

2. La superficie di un poliedro regolare è costituita da poligoni regolari tutti dello stesso tipo e in ogni vertice di ciascun angolo solido concorre lo stesso numero di poligoni. È dunque necessario che la somma degli angoli che concorrono in vertice sia minore di 360°. Si hanno così i seguenti casi possibili.
   a. nel vertice dell'angolo solido concorrono tre triangoli equilateri (somma 180°) si ha il **tetraedro** (quattro facce)
   b. nel vertice dell'angolo solido concorrono quattro triangoli equilateri (somma 240°) si ha il l'**ottaedro** (otto facce)
   c. nel vertice dell'angolo solido concorrono cinque triangoli equilateri (somma 300°) si ha l'**icosaedro** (venti facce). Sei triangoli danno 360° e non formano angolo solido.
   d. nel vertice dell'angolo solido concorrono tre quadrati (somma 270°) si ha l'**esaedro** o **cubo** (sei facce). Quattro quadrati danno 360° e non formano angolo solido
   e. nel vertice dell'angolo solido concorrono tre pentagoni (somma 324°) si ha il **dodecaedro** (dodici facce). Quattro pentagoni danno 432° e non formano angolo solido.

   I cinque poliedri regolari sono anche detti *solidi platonici*.

3. Posto AB = x BC = y, si ha: A'B'= $x - 4$ B'C'= $y - 8$
   Si ha, con riferimento alla figura a lato,
   z = area(ABCD) = xy
   e area(A'B'C'D') = $(x-4)(y-8)=50$ da cui $y = \frac{50}{x-4} + 8$ che
   sostituito in z dà:
   $z = 2x\left(\frac{25}{x-4} + 4\right)$ da cui $z' = 8\frac{x^2 - 8x - 9}{(x-4)^2}$
   Studiando il segno della derivata prima si ha l'area minima richiesta per $x = 9cm$ e $y = 18cm$



4. La diagonale d del cubo è data dal diametro della sfera. Pertanto lo spigolo del cubo è $\lambda = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ ed il suo volume $V = \frac{\sqrt{3}}{9} m^3$. Poiché $1m^3 = 1000 litri$, la capacità del serbatoio è circa 192,45 *litri*.

5. Si ha $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ Ponendo nella formula $a=b=1$ si ottiene $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

6. Il quesito conduce sistema misto parametrico:

$$\begin{cases}\cos 2x = \dfrac{5k-2}{k} \\ 0 < \cos 2x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \quad \text{con} \quad 30° < 2x < 90°$$

Pertanto il sistema ammette una soluzione per i valori di k che soddisfano il sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \dfrac{5k-2}{k} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \quad \text{cioè per } \frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}$$

7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ è un polinomio di 3° grado, ovunque continua e derivabile, pertanto le condizioni poste dal teorema sono verificate. Essendo $f'(x) = 3x^2 - 2x$, il valore ξ richiesto è soluzione dell'equazione $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ ovvero $3\xi^2 - 4\xi + 1 = 0$. Le soluzioni di tale equazione sono $\xi_1 = \dfrac{1}{3}$ e $\xi_2 = 1$. Per le condizioni poste dal problema la seconda non è accettabile.

8. Si perché la funzione $f(x) = tgx$ presenta una discontinuità nel punto $x = \dfrac{\pi}{2}$ interno all'intervallo. La funzione $f(x) = tgx$ assume valore 1 $\dfrac{\pi}{4}$ e poi fino a $x = \dfrac{\pi}{2}$ (escluso) è sempre crescente. Oltre il $x = \dfrac{\pi}{2}$ e fino a $x = \dfrac{3\pi}{4}$ è crescente, ma il suo valore massimo è –1.

9. La funzione richiesta è la funzione $f(x) = e^x$

10. Le condizioni poste conducono al seguente sistema lineare nelle incognite *a* e *b*

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}a - \dfrac{1}{2}b = 1 \\ -\dfrac{1}{2}a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b = 0\end{cases} \quad \text{la cui soluzione è} \quad \begin{cases}a = \sqrt{3} \\ b = 1\end{cases}$$

Prof. Gianfranco Pistoni Liceo scientifico Archimede
Prof. Ferrucio Rohr Liceo scientifico Nomentano